數學傳播 49卷3期, pp. 131-152

三角形各內角的 n 等分線於臨近三角形周邊的交點性質

—深化統合 Morley 角三分線定理 (Morley's theorem)—

李輝濱

壹、前言

平面幾何中以尺規作圖法對任一角度作 n 等分角被證明是不盡然可行的; 但若放寬尺規作圖的限制, 或允許使用另外的工具, 那麼 n 等分任意角仍舊是可能的; 意即平面上任何角度的 n 等分線於理論上是存在的, n 爲正整數。

首先, 請檢視下列的多倍角三角恆等式轉化成數值連乘積形式;

(i) 2 倍角: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 2\sin\theta\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$。

(ii) 3 倍角:

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta\cdot(3-4\sin^2\theta)\\ &= \sin\theta\cdot(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &= \sin\theta\cdot(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\cdot(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)\\ &= 4\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right).\end{aligned}$$

(iii) 4 倍角:

$$\begin{aligned}\sin 4\theta &= 2\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta = 4\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &= 4\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(\cos\theta+\sin\theta)\cdot(\cos\theta-\sin\theta)\\ &= 8\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)\\ &= 8\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right).\end{aligned}$$

(iv) 5 倍角:

$$\begin{aligned}
\sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\cdot\sin\theta - 10\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta + \sin^5\theta\\
&= \sin\theta\cdot(5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + \sin^4\theta)\\
&= \sin\theta\cdot[(25\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + \sin^4\theta) - 20\cos^4\theta]\\
&= \sin\theta\cdot[(5\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 - (2\sqrt{5}\cdot\cos^2\theta)^2]\\
&= \sin\theta\cdot[(5-2\sqrt{5})\cos^2\theta - \sin^2\theta]\cdot[(5+2\sqrt{5})\cos^2\theta - \sin^2\theta]\\
&= \sin\theta\cdot\Big(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\cos\theta + \sin\theta\Big)\Big(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\cos\theta - \sin\theta\Big)\\
&\quad\cdot\Big(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cos\theta + \sin\theta\Big)\Big(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cos\theta - \sin\theta\Big)\\
&= 16\sin\theta\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{5}+\theta\Big)\cdot\sin\Big(\frac{2\pi}{5}+\theta\Big)\cdot\sin\Big(\frac{3\pi}{5}+\theta\Big)\cdot\sin\Big(\frac{4\pi}{5}+\theta\Big).
\end{aligned}$$

因 $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

持續應用 De Moivre's theorem 對 6θ、7θ、8θ、$\cdots$、$n\theta$ 作正弦型演算, 可得。

(v) n 倍角: $\sin(n\theta) = 2^{n-1}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\sin\Big(\frac{j\pi}{n}+\theta\Big)$。$n$ 爲正整數。這 $\sin(n\theta)$ 的展開公式敬請參閱 Mathematica、Wolfram Mathworld 或 Wikipedia 資料。

引述這 n 倍角的 $\sin(n\theta) = 2^{n-1}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\sin\Big(\frac{j\pi}{n}+\theta\Big)$ 正弦數值連乘積公式對本文標題角度 n 等分線性質的探討運算會啟動很高效益的應用推理演繹作用。

貳、本文

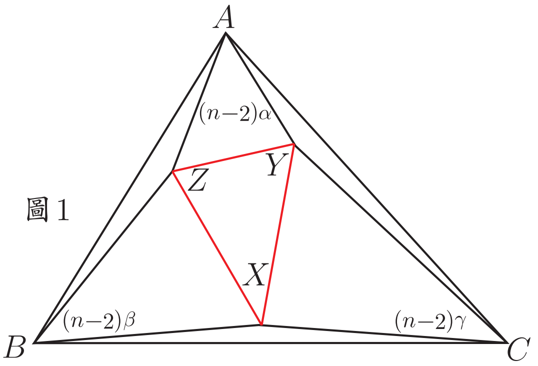
特意要應用 n 倍角正弦數值連乘積公式 $\sin(n\theta) = 2^{n-1}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\sin\Big(\frac{j\pi}{n}+\theta\Big)$, 主文將詳細分析並推演出三角形各內角的 n 等分線類型各交點性質, 而後再利用這 n 等分線交點性質逐一推論出三角形各內角的三等分線、四等分線、五等分線、$\cdots$ 等同類型各交點性質。所有的思維與運算過程盡在主題敘述內容中。

一、三角形各內角的 n 等分線性質

主要命題: 任意給定一個 $\triangle ABC$, 示意圖 1, 頂角 $\angle CAB$ 角度設爲 A, A 角度的 n 等分線有 $\overline{AZ}$、$\overline{AY}$; 頂角 $\angle ABC$ 角度設爲 B, B 角度的 n 等分線有 $\overline{BX}$、$\overline{BZ}$; 頂角 $\angle BCA$ 角度設爲 C, C 角度的 n 等分線有 $\overline{CY}$、$\overline{CX}$, 臨近 $\triangle ABC$ 同一邊的兩道 n 等分線各相交於點 X、Y、Z, 形成一個內部的 $\triangle XYZ$ 如圖示。

求證: $\triangle XYZ$ 的各內角角度爲何及其性質 ?

圖 1



$$\angle ZAY = (n-2)\alpha$$
$$\angle ZBX = (n-2)\beta$$
$$\angle XCY = (n-2)\gamma$$
$$\angle BAZ = \angle CAY = \alpha$$
$$\angle ABZ = \angle XBC = \beta$$
$$\angle ACY = \angle BCX = \gamma$$

證明: 圖 1 的 $\triangle ABC$, 角度 $A = n\alpha$, $B = n\beta$, $C = n\gamma$, 則 $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{n}$。

由參考 n 倍角的數值連乘積公式可得知 $\sin(n\theta) = 2^{n-1}\cdot\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\theta\right)$,

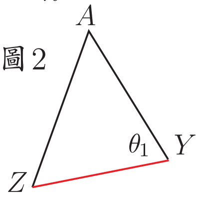
(i) 在 $\triangle ABZ$ 中, $\angle AZB = \pi-\alpha-\beta = \dfrac{(n-1)\pi}{n}+\gamma$, 應用三角形正弦定理, 得 $\dfrac{\overline{AZ}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\gamma\right)}$, 得線段 $\overline{AZ} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\beta}{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\gamma\right)}$, 同理在 $\triangle AYC$ 中, 可得線段 $\overline{AY} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\sin\gamma}{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\beta\right)}$。

另在 $\triangle ABC$ 中, 線段關係式 $\overline{AB}\cdot\sin n\beta = \overline{AC}\cdot\sin n\gamma$, 得 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin n\gamma}{\sin n\beta}$。

(ii) 由

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\beta\right)}{\sin\gamma\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\gamma\right)} = \frac{\sin n\gamma}{\sin n\beta}\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\beta\right)}{\sin\gamma\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\gamma\right)}$$
$$= \frac{2^{n-1}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)}{2^{n-1}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)}\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\beta\right)}{\sin\gamma\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\gamma\right)}$$
$$\Longrightarrow\quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{AY}} = \frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)}{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)}. \tag{1}$$

圖 2



$$\angle ZAY = (n-2)\alpha$$
$$\angle AYZ = \theta_1$$
$$\angle AZY = \pi-(n-2)\alpha-\theta_1$$

(iii) 圖 2 的 $\triangle AZY$ 是來自圖 1 內的部分圖形放大圖;
設定圖 2 中的 $\angle AYZ=\theta_1$, 則 $\angle AZY=\pi-(n-2)\alpha-\theta_1$。由正弦關係式可得 $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AY}}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\big(\pi-(n-2)\alpha-\theta_1\big)}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\big((n-2)\alpha+\theta_1\big)}$, 再連同 (1) 式, 又得 $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AY}}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin((n-2)\alpha+\theta_1)}=\dfrac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)}{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)}$。取 $k_1=\dfrac{\sin((n-2)\alpha+\theta_1)}{\sin\theta_1}=\dfrac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)}{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)}$。
對 $k_1=\dfrac{\sin((n-2)\alpha+\theta_1)}{\sin\theta_1}$ 作展開運算, 可得 $\tan\theta_1=\dfrac{\sin((n-2)\alpha)}{k_1-\cos((n-2)\alpha)}$。所以有 $\sin\theta_1=\dfrac{\sin((n-2)\alpha)}{\sqrt{k_1^2+1-2k_1\cos\big((n-2)\alpha\big)}}$, 將 $k_1=\dfrac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)}{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)}$ 代入 $\sin\theta_1$ 中, 得

$$\sin\theta_1=\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)\cdot\sin\big((n-2)\alpha\big)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)\cos\big((n-2)\alpha\big)}}. \tag{2}$$

可得知 $\sin\theta_1$ 可由 α、β、γ 三個角度值計算出來, 又可得到:

$$\theta_1=\sin^{-1}\left[\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)\cdot\sin\big((n-2)\alpha\big)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)\cos\big((n-2)\alpha\big)}}\right]. \tag{3}$$

而圖 2 中的 $\angle AZY=\pi-(n-2)\alpha-\theta_1=\theta_2$ 也可以計算出。
(iv) 仿效 (i)、(ii)、(iii), 對 $\triangle BXZ$ 作運算, 設 $\angle BZX=\theta_3$, $\angle BXZ=\theta_4$。圖 3, 得 $\sin\theta_3=\dfrac{\sin\big((n-2)\beta\big)}{\sqrt{k_2^2+1-2k_2\cos\big((n-2)\beta\big)}}$ 且 $k_2=\dfrac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)}{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)}$, 再運算得

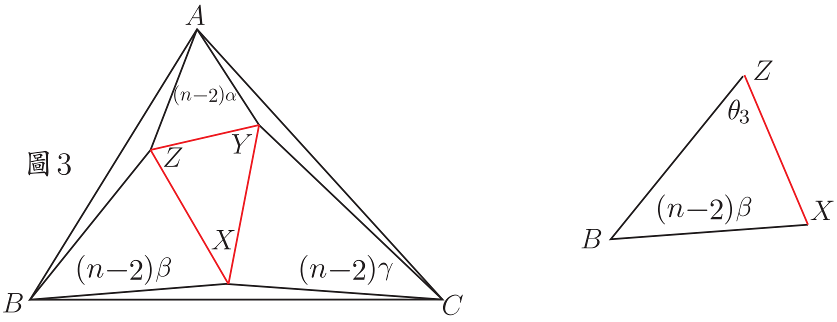


圖 3

$$\sin\theta_3 = \frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\sin\left((n-2)\beta\right)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left((n-2)\beta\right)}}.$$

且知悉 $\sin\theta_3$ 可由 α、β、γ 三個角度值計算出來, 又可得到:

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left[\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\sin\left((n-2)\beta\right)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left((n-2)\beta\right)}}\right]. \tag{4}$$

而圖 3 中的 $\angle BXZ = \pi-(n-2)\beta-\theta_3 = \theta_4$ 也可以計算出。
同理, 再對 $\triangle CYX$ 作推理運算, 圖4, 可令 $\angle CXY = \theta_5$, $\angle CYX = \theta_6$。得

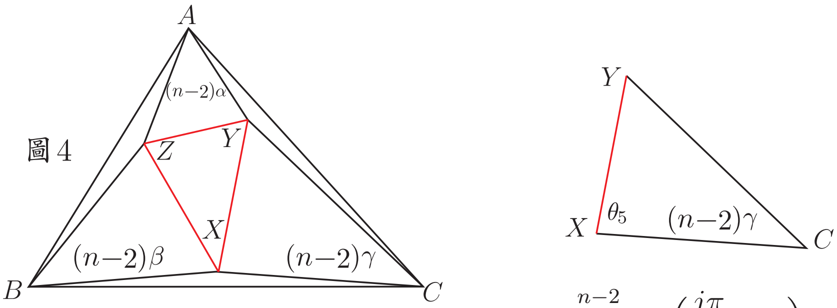


圖 4

$$\sin\theta_5 = \frac{\sin\left((n-2)\gamma\right)}{\sqrt{k_3^2+1-2k_3\cos\left((n-2)\gamma\right)}}$$ 且 $$k_3 = \frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)}{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)},$$ 再運算得

$\sin\theta_5 =$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\sin\left((n-2)\gamma\right)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cos\left((n-2)\gamma\right)}}.$$

確認了 $\sin\theta_5$ 可由 α、β、γ 三個角度值計算出來, 又可得到:

$$\theta_5=\sin^{-1}\left[\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\sin\left((n-2)\gamma\right)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cos\left((n-2)\gamma\right)}}\right]. \tag{5}$$

而圖 4 中的 $\angle CYX=\pi-(n-2)\gamma-\theta_5=\theta_6$ 也可以計算出。

(v) 參考圖 1、2 與圖 3、4; 觀察到在 $\triangle XYZ$ 的點 Z 四周圍會有角度關係:

$(\angle AZY)+(\angle AZB)+(\angle BZX)+(\angle YZX)=2\pi$, 將各角度代入, 得

$$\theta_2+\left(\frac{(n-1)\pi}{n}+\gamma\right)+\theta_3+(\angle YZX)=2\pi,\ \text{得}\ \angle YZX=\frac{(n+1)\pi}{n}-\gamma-\theta_2-\theta_3. \tag{6}$$

再演算點 X 四周圍角度關係, 可得

$$\angle ZXY=\frac{(n+1)\pi}{n}-\alpha-\theta_4-\theta_5. \tag{7}$$

繼續演算點 Y 四周圍角度關係, 再得

$$\angle XYZ=\frac{(n+1)\pi}{n}-\beta-\theta_6-\theta_1. \tag{8}$$

從而確認得出 $\triangle XYZ$ 的各內角角度爲 (6) 式、(7) 式、(8) 式。主命題證明完成。

性質推論: 仔細查驗 (6)、(7)、(8) 式三式的實際內涵, 發現 $\triangle XYZ$ 的各內角角度不一定完全相等。透過不同設定條件的比較, 可研判出下列相異屬性結果;

推論 1: 若原 $\triangle ABC$ 是等邊三角形, 即有 $\alpha=\beta=\gamma$, 則由 (2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8) 式七式的各內涵可得知 $\triangle XYZ$ 爲等邊三角形。

推論 2: 若原 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 即設定 $\alpha>\beta=\gamma$ 時, 則由 (2) 式形式可運算出 $\sin\theta_1=\cos\left(\frac{(n-2)\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(n-2)\alpha}{2}\right)$, 所以有 $\theta_1=\frac{\pi}{2}-\frac{(n-2)\alpha}{2}=\angle AYZ$,

而圖 2 中的 $\angle AZY=\pi-(n-2)\alpha-\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{(n-2)\alpha}{2}$, 即 $\theta_1=\theta_2$, 使得 $\triangle AZY$ 爲等腰三角形。

而另外在 $\alpha>\beta=\gamma$ 時, 此刻的 $\sin\theta_3$、$\sin\theta_5$ 要分別轉換爲

$$\sin\theta_3=$$
$$\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\sin\big((n-2)\beta\big)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cos\big((n-2)\beta\big)}}.$$

$$\sin\theta_5=$$
$$\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\sin\big((n-2)\beta\big)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cos\big((n-2)\beta\big)}}.$$

$\sin\theta_3$ 與 $\sin\theta_5$ 的分母完全相等, 現在來檢視 θ_6; 由 $\pi-(n-2)\gamma-\theta_5=\theta_6$ 得 $\sin\theta_6=\sin[(n-2)\gamma+\theta_5]=\sin((n-2)\gamma)\cdot\cos\theta_5+\cos\big((n-2)\gamma\big)\cdot\sin\theta_5=\sin\big((n-2)\beta\big)\cdot\cos\theta_5+\cos\big((n-2)\beta\big)\cdot\sin\theta_5$ (因有 $\beta=\gamma$), 又演算出

$$\cos\theta_5=$$
$$\frac{\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)-\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cdot\cos\big((n-2)\beta\big)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cos\big((n-2)\beta\big)}}.$$

使得 $\sin\theta_6=\sin\big((n-2)\beta\big)\cdot\cos\theta_5+\cos\big((n-2)\beta\big)\cdot\sin\theta_5=$

$$\frac{\sin\big((n-2)\beta\big)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)+\prod_{j=1}^{n-2}\sin^2\!\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)\cos\big((n-2)\beta\big)}}.$$

$=\sin\theta_3$, 因此運算出 $\theta_3=\theta_6$, 且又有 $\theta_4=\theta_5$, 加上 $\theta_1=\theta_2$。使得 $\triangle XYZ$ 的兩角度 $\angle YZX=\angle XYZ$ 相等, 確認 $\triangle XYZ$ 是頂角爲 X 的等腰三角形。此時圖中的四邊形 $\diamondsuit\ AZXY$ 成爲 $\triangle ABC$ 等腰三角形的內嵌鳶形。

推論3: 若原 $\triangle ABC$ 是三邊各不相等的三角形, 即設定 $\alpha>\beta>\gamma$ 時, 由演算出的 (6) 式、

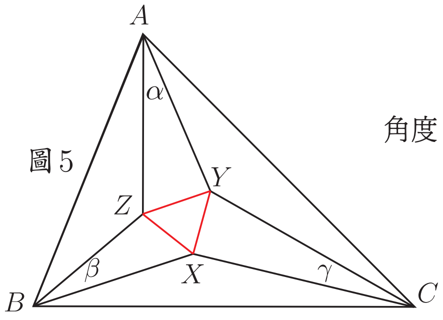
(7) 式、(8) 式三式可推測出 $\angle YZX > \angle XYZ > \angle ZXY$, 而 $\triangle XYZ$ 的三邊長度大小爲各線段長 $\overline{XY} > \overline{ZX} > \overline{YZ}$, 圖1。

證明: 略。(註: 在三角形的角 4 等分線性質時以數據說明)

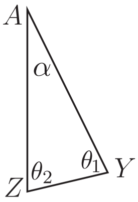
二、三角形各內角的 3 等分線性質

圖5任給一個 $\triangle ABC$, A 角度的三等分線爲 $\overline{AZ}$、$\overline{AY}$; B 角度的三等分線爲 $\overline{BX}$、$\overline{BZ}$; C 角度的三等分線爲 $\overline{CY}$、$\overline{CX}$, 這三內角鄰近 $\triangle ABC$ 同一周邊的三等分線相交於圖形內的點 X、Y、Z, 形成一個內部 $\triangle XYZ$, 如圖示。
求證: $\triangle XYZ$ 是等邊三角形。

圖 5



角度 $A = 3\alpha$
$B = 3\beta$
$C = 3\gamma$

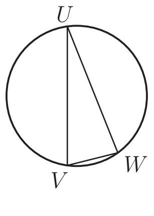


$\angle AYZ = \theta_1$
$\angle AZY = \theta_2$

證明: 圖5, 由角度 $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$, $C = 3\gamma$, 則 $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{3}$。此處令主命題敘述中的 $n = 3$, 則 (2) 式型式將運算轉換成下列精簡新型式;

$$\sin\theta_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cdot\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cdot\cos\alpha}}. \tag{9}$$

圖 6



外接圓直徑爲 1 的 $\triangle UVW$
$\angle WUV = \alpha$, $\angle UVW = \dfrac{\pi}{3} + \beta$, $\angle VWU = \dfrac{\pi}{3} + \gamma$,

(i) 這 $\triangle AZY$ 裡 (9) 式中的分母內涵敘述中顯露了一項重要線索, 其詳情如下:
因 $\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)+\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)+\alpha=\pi$, 可作一個外接圓直徑爲 1 的 $\triangle UVW$, 圖 6, 使得 $\angle WUV = \alpha$, $\angle UVW = \dfrac{\pi}{3} + \beta$, $\angle VWU = \dfrac{\pi}{3} + \gamma$, 則由正弦定理即得 $\overline{UV} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)$, $\overline{UW} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)$, $\overline{VW} = \sin\alpha$。在 $\triangle UVW$ 中餘弦定理有

$$\sin^2\alpha=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cdot\cos\alpha\text{。}$$

則 (9) 式 $\sin\theta_1$ 中的分母恰等於 $\sin\alpha$, 因此證明得 $\sin\theta_1=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)$, 可取得 $\theta_1=\frac{\pi}{3}+\gamma=\angle AYZ$。而圖 5 中的 $\angle AZY=\pi-\alpha-\theta_1=\frac{\pi}{3}+\beta=\theta_2$。

(ii) 仿效 (i), 對圖5的 $\triangle BXZ$ 作運算得 $\angle BZX=\theta_3=\frac{\pi}{3}+\alpha$, $\angle BXZ=\frac{\pi}{3}+\gamma$。同理, 再對 $\triangle CYX$ 作推理運算可得 $\angle CXY=\theta_5=\frac{\pi}{3}+\beta$, $\angle CYX=\frac{\pi}{3}+\alpha$。

(iii) 參考下圖 5a 左側與右側 2 圖, 在 $\triangle XYZ$ 的點 Z 四周圍會有角度關係:
$(\angle AZY)+(\angle AZB)+(\angle BZX)+(\angle YZX)=2\pi$, 將各角度代入, 得
$\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\left(\frac{2\pi}{3}+\gamma\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+(\angle YZX)=2\pi$, 即得 $\angle YZX=\frac{\pi}{3}$ 爲 60°;

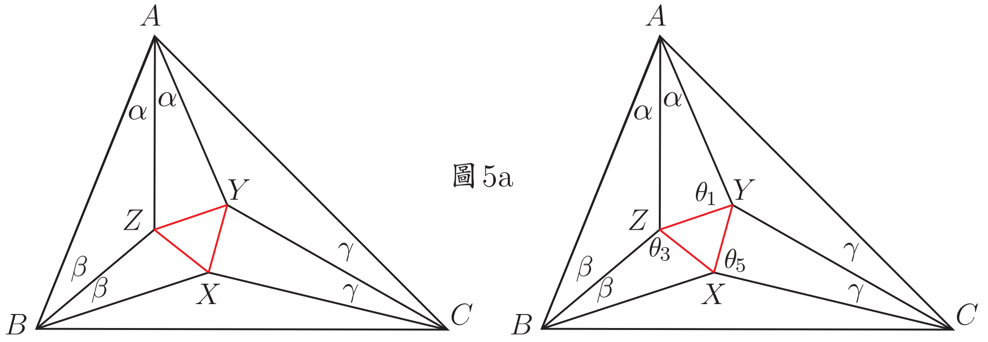


圖 5a

再演算點 X 四周圍、點 Y 四周圍角度關係, 可得 $\angle ZXY=\frac{\pi}{3}=\angle XYZ$ 爲 60°;
從而確認得出 $\triangle XYZ$ 是等邊三角形。證明完成。這是 Morley 角三分線定理。

Morley 角三分線定理構造了內嵌式詳實自然又完美對稱的等邊三角形效果。Morley角三分線定理是由數學家 Frank Morley (1860∼1937) 在 1899 年發現的。

本文主題論述的三角形各內角的 n 等分線交點性質, 在取 $n=3$ 時即能順勢推演出著名的 Morley 角三分線定理 (Morley's theorem)。所以, 本主題三角形各內角的 n 等分線交點性質實際上已經涵蓋並深化統合了 Morley's theorem, 使得 Morley's theorem 成爲這三角形各內角的 n 等分線交點性質的一個特例!

三、三角形各內角的四等分線性質

任意給定一個 $\triangle ABC$, 圖 7, 頂角 A 角度的四等分線爲 $\overline{AZ}$、$\overline{AY}$; 頂角 B 的四等分線爲 $\overline{BX}$、$\overline{BZ}$; 頂角 C 的四等分線爲 $\overline{CY}$、$\overline{CX}$, 這三內角鄰近 $\triangle ABC$ 同一周邊的兩道四等分線各相交於點 X、Y、Z, 形成一個內部的 $\triangle XYZ$。
求證: $\triangle XYZ$ 的各內角角度爲何 ?

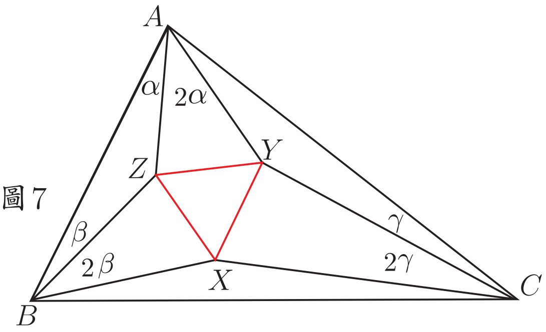
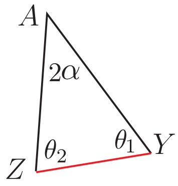


圖 7



$\angle YAZ = 2\alpha$
$\angle AYZ = \theta_1$
$\angle AZY = \theta_2$

證明: 圖 7 的 $\triangle ABC$, 角度 $A = 4\alpha$, $B = 4\beta$, $C = 4\gamma$, 則 $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$。

(i) 令主要命題敘述中的 $n=4$, 則 (2) 式型式將運算轉換成下列簡潔新型式;

$$\sin\theta_1 = \frac{\cos\gamma\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cdot\sin(2\alpha)}{\sqrt{\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)+\cos^2\gamma\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\gamma)-2\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cdot\cos(2\alpha)}}. \tag{10}$$

得知 $\sin\theta_1$ 可由 α、β、γ 三個角度值計算出來, 又可得到:

$$\theta_1 = \angle AYZ = \sin^{-1}\left[\frac{\cos\gamma\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cdot\sin(2\alpha)}{\sqrt{\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)+\cos^2\gamma\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\gamma)-2\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cdot\cos(2\alpha)}}\right]. \tag{11}$$

而圖 7 中的 $\angle AZY = \pi - 2\alpha - \theta_1 = \theta_2$ 也可以計算出。

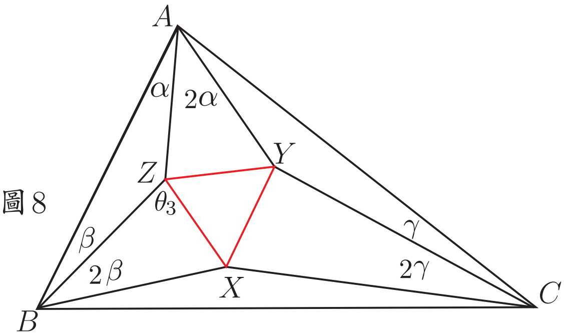
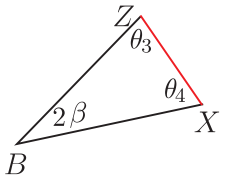


圖 8



(ii) 仿效 (i), 對 $\triangle BXZ$ 作運算, 設 $\angle BZX = \theta_3$, $\angle BXZ = \theta_4$, 圖 8。得等式

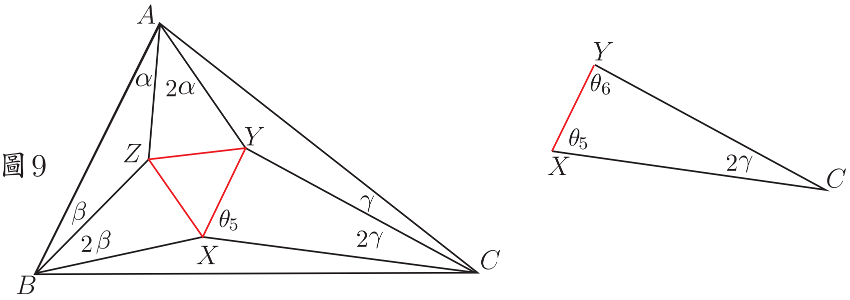
$$\sin\theta_3 = \frac{\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(2\beta)}{\sqrt{\cos^2\gamma\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\gamma)+\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-2\cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\cos(2\beta)}}. \tag{12}$$

知悉 $\sin\theta_3$ 可由 α、β、γ 三個角度值計算出來, 又可得到:

$$\theta_3=\sin^{-1}\left[\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(2\beta)}{\sqrt{\cos^2\gamma\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\gamma)+\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-2\cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\cos(2\beta)}}\right]. \tag{13}$$

而圖 8 中的 $\angle BXZ=\pi-2\beta-\theta_3=\theta_4$ 也可以計算出。

圖 9



同理, 再對 $\triangle CYX$ 作推理運算, 圖 9, 可令 $\angle CXY=\theta_5$, $\angle CYX=\theta_6$。得

$$\sin\theta_5=\frac{\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\sin(2\gamma)}{\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\gamma)}}. \tag{14}$$

認知 $\sin\theta_5$ 可由 α、β、γ 三個角度值計算出來, 又可得到:

$$\theta_5=\sin^{-1}\left[\frac{\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\sin(2\gamma)}{\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\gamma)}}\right]. \tag{15}$$

而圖 9 中的 $\angle CYX=\pi-2\gamma-\theta_5=\theta_6$ 也可以計算出。

(iii) 參考圖 7、8、9; 觀察到 $\triangle XYZ$ 的點 Z 四周圍會有角度關係: $\angle AZB=\dfrac{3\pi}{4}+\gamma$ 且 $(\angle AZY)+(\angle AZB)+(\angle BZX)+(\angle YZX)=2\pi$, 將各角度代入, 得

$$\theta_2+\left(\frac{3\pi}{4}+\gamma\right)+\theta_3+(\angle YZX)=2\pi,\ \text{即得}\ \angle YZX=\frac{5\pi}{4}-\gamma-\theta_2-\theta_3. \tag{16}$$

再演算點 X 四周圍角度關係, 可得

$$\angle ZXY=\frac{5\pi}{4}-\alpha-\theta_4-\theta_5. \tag{17}$$

繼續演算點 Y 四周圍角度關係, 再得

$$\angle XYZ = \frac{5\pi}{4} - \beta - \theta_6 - \theta_1, \tag{18}$$

從而確認得出 $\triangle XYZ$ 的各內角角度爲 (16) 式、(17) 式、(18) 式。演算證明完成。

性質推論: 詳盡查驗 (16) 式、(17) 式、(18) 式三式實質內涵, 發現 $\triangle XYZ$ 的各內角角度不一定完全相等。透過不同條件的比較, 可研判出下列相異屬性結果;

推論 4: 若原 $\triangle ABC$ 是等邊三角形, 即有 $\alpha=\beta=\gamma$, 則由 (10)、(12)、(14)、(16)、(17)、(18) 式六式的各內涵可得知角的四等分線交點 $\triangle XYZ$ 爲等邊三角形。

推論 5: 若原 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 即設定 $\alpha>\beta=\gamma$ 時, 則由 (10) 式形式可以運算出 $\sin\theta_1=\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$, 因 $\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$, 即有 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\angle AYZ$, 而圖 7 中的 $\angle AZY=\pi-2\alpha-\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, 即 $\theta_1=\theta_2$, 使得 $\triangle AZY$ 成爲等腰三角形。

而另外在 $\alpha>\beta=\gamma$ 時, 此刻的 $\sin\theta_3$、$\sin\theta_5$ 要分別轉換爲

$$\sin\theta_3=\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(2\beta)}{\sqrt{\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)+\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-2\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\cos(2\beta)}}$$

$$\sin\theta_5=\frac{\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\sin(2\beta)}{\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\beta)}}.$$

$\sin\theta_3$ 與 $\sin\theta_5$ 的分母完全相等, 現在來檢視 θ_6; 由 $\pi-2\gamma-\theta_5=\theta_6$
得 $\sin\theta_6=\sin(2\gamma+\theta_5)=\sin(2\gamma)\cdot\cos\theta_5+\cos(2\gamma)\cdot\sin\theta_5$
$=\sin(2\beta)\cdot\cos\theta_5+\cos(2\beta)\cdot\sin\theta_5$, (因有 $\beta=\gamma$), 又演算出

$$\cos\theta_5=\frac{\prod_{j=1}^{2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\alpha)-\prod_{j=1}^{2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\beta)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2}\sin^2(\frac{j\pi}{4}+\alpha)+\prod_{j=1}^{2}\sin^2(\frac{j\pi}{4}+\beta)-2\prod_{j=1}^{2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\alpha)\cdot\prod_{j=1}^{2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\beta)}},$$

使得 $\sin\theta_6=\sin(2\beta)\cdot\cos\theta_5+\cos(2\beta)\cdot\sin\theta_5=$

$$\frac{\sin(2\beta)\cdot\prod_{j=1}^{2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\alpha)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2}\sin^2(\frac{j\pi}{4}+\alpha)+\prod_{j=1}^{2}\sin^2(\frac{j\pi}{4}+\beta)-2\prod_{j=1}^{n-2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\alpha)\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\sin(\frac{j\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\beta)}},$$

$$\sin\theta_6=$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(2\beta)}{\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos^2\beta\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)\cdot\cos(2\beta)}}$$

$$=\sin\theta_3,$$

因此運算出 $\theta_3=\theta_6$, 且又有 $\theta_4=\theta_5$, 加上 $\theta_1=\theta_2$。使得 $\triangle XYZ$ 的兩角度 $\angle YZX=\angle XYZ$ 相等, 確認 $\triangle XYZ$ 是頂角爲 X 的等腰三角形。

推論 6: 若原 $\triangle ABC$ 是三邊各不相等的三角形, 即設定 $\alpha>\beta>\gamma$ 時, 由演算出的 (16) 式、(17) 式、(18) 式三式可推測出 $\angle YZX>\angle XYZ>\angle ZXY$, 而 $\triangle XYZ$ 的三邊長度大小爲各線段長 $\overline{XY}>\overline{ZX}>\overline{YZ}$, 圖 7。

實例說明: 增強效果以角度分佈爲 $100°-60°-20°$ 的三角形作數據說明。因 $\alpha=25°,\beta=15°,\gamma=5°$, 查詢三角函數值表, 分別得出各數據爲:

$$\sin 10°=0.173648,\quad \sin 50°=0.766044,\quad \sin 70°=0.939693,$$
$$\cos 5°=0.996195,\quad \cos 10°=0.984808,\quad \cos 15°=0.965926,$$
$$\cos 25°=0.906308,\quad \cos 50°=0.642788,$$

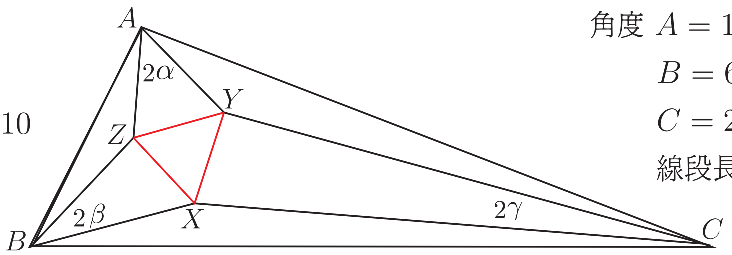
(i) 將各數據代入 (10) 式 $\sin\theta_1$ 中, 計算得 $\sin\theta_1=0.8605747$, 再查表得 $\sin 59.3812°=0.8605749$, 可比較得 $\theta_1\approx 59.3812°$, 因 $\theta_2=\pi-2\alpha-\theta_1$, 得 $\theta_2\approx 70.6188°$。

(ii) 將各數據代入 (12) 式 $\sin\theta_3$ 中, 計算得 $\sin\theta_3=0.9982032$, 再查表得 $\sin 86.565°=0.9982034$, 可比較得 $\theta_3\approx 86.565°$, 因 $\theta_4=\pi-2\beta-\theta_3$, 得 $\theta_4\approx 63.425°$, 再由 $\angle YZX=\dfrac{5\pi}{4}-\gamma-\theta_2-\theta_3\approx 62.8162°$ 。

(iii) 將各數據代入 (14) 式 $\sin\theta_5$ 中, 計算得 $\sin\theta_5=0.982128$, 再查表得 $\sin 79.152°=0.982129$, 可比較得 $\theta_5\approx 79.152°$, 因 $\theta_6=\pi-2\gamma-\theta_5$, 得 $\theta_6\approx 90.848°$, 再由 $\angle ZXY=\dfrac{5\pi}{4}-\alpha-\theta_4-\theta_5\approx 57.413°$ 。另再由 $\angle XYZ=\dfrac{5\pi}{4}-\beta-\theta_6-\theta_1$, 得 $\angle XYZ\approx 59.7708°$。

(iv) 由 (i)、(ii)、(iii) 的計算得到角度大小爲: $\angle YZX>\angle XYZ>\angle ZXY$, 而 $\triangle XYZ$ 三邊長度大小爲 線段長 $\overline{XY}>\overline{ZX}>\overline{YZ}$。印證了推論 3、6, 圖 10。

圖 10



角度 $A = 100^\circ$

$B = 60^\circ$

$C = 20^\circ$

線段長 $\overline{XY} > \overline{ZX} > \overline{YZ}$

四、三角形各內角的五等分線、六等分線、$\cdots$ 交點性質相似性

詳細再度推演探究三角形各內角的五等分線、六等分線、$\cdots$ 交點性質 (略), 獲得的是它們都與四等分線、n 等分線情形具有相似的結果, 而與三等分線情況截然不同; 主要原因是三等分線情況其 $\sin\theta_1$ 分式型分子的 $\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\gamma\right)$ 正弦數值連乘積式僅僅剩下單一項爲 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)$, 而 θ_3 部分 $\sin\theta_3$ 分子的 $\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\alpha\right)$ 僅剩下單一項 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, $\sin\theta_5$ 分子的 $\prod_{j=1}^{n-2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\beta\right)$ 僅剩下單一項 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$。相較於四等分線、五等分線、六等分線、$\cdots$、$n$ 等分線情形其各 $\sin\theta_i$ 分式型分子的正弦數值連乘積式至少都有 2 項或更多項的連乘積式, 使得 θ_1、θ_3、θ_5 角度無法各自寫成純 α、β、γ 的線性組合式; 這樣的差異即使得四等分線、五等分線、六等分線、$\cdots$、n 等分線的交點性質無法構造出內嵌的等邊三角形 $\triangle XYZ$ 特質。

五、任意三角形的內接正三角形

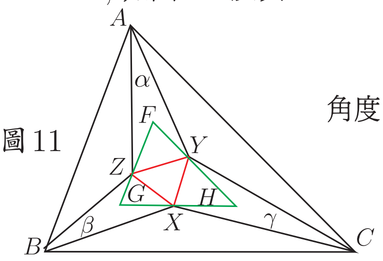
(一) 三角形各內角的三等分線交點性質創造出任意三角形的一個內接正三角形

由三角形各內角的三等分線交點性質必能構造出內嵌的等邊三角形 $\triangle XYZ$。根據這點特質可以利用增添新輔助線方式而規劃製作出此等邊三角形 $\triangle XYZ$ 的外接三角形, 因而尋獲了任意三角形的一個內接正三角形作圖法。

推論 7: 任意三角形的一個內接正三角形作圖法。

證明: 透過圖 5 分別作出通過點 X 的一條直線使其平行於線段 $\overline{BC}$, 通過點 Y 的一條直線使其平行於線段 $\overline{CA}$, 通過點 Z 的一條直線使其平行於線段 $\overline{AB}$, 這 3 道直線相交於3個點形成 $\triangle FGH$, 如圖 11 及其 $\triangle FGH$ 放大圖示。

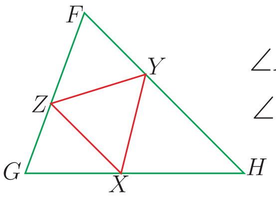
圖 11



角度 $A = 3\alpha$

$B = 3\beta$

$C = 3\gamma$



$\angle AYZ = \theta_1$

$\angle AZY = \theta_2$

(i) 圖 11 中 $\triangle AZY$ 的 $\angle AYZ=\theta_1=\dfrac{\pi}{3}+\gamma=\angle AYF+\angle FYZ=\alpha+\angle FYZ$, 可得 $\angle FYZ=\beta+2\gamma$。而 $\angle AZY=\theta_2=\dfrac{\pi}{3}+\beta=\angle AZF+\angle FZY=\alpha+\angle FZY$, 得 $\angle FZY=2\beta+\gamma$ 。

(ii) 仿效 (i) 對 $\triangle BXZ$ 作相同運算, 得 $\angle GZX=2\alpha+\gamma$, $\angle GXZ=2\gamma+\alpha$。同樣再對 $\triangle CYX$ 作推演運算, 可得 $\angle HXY=2\beta+\alpha$, $\angle HYX=2\alpha+\beta$。

(iii) 圖 11 中 $\triangle FGH$ 的 $\angle YFZ=3\alpha$, $\angle ZGX=3\beta$, $\angle XHY=3\gamma$, 而 $\triangle FZY$ 中由正弦定理有 $\dfrac{\overline{FZ}}{\sin(\beta+2\gamma)}=\dfrac{\overline{FY}}{\sin(2\beta+\gamma)}=\dfrac{\overline{YZ}}{\sin(3\alpha)}$, 得 $\overline{FZ}=\overline{YZ}\cdot\dfrac{\sin(\beta+2\gamma)}{\sin(3\alpha)}$ 且 $\overline{FY}=\overline{YZ}\cdot\dfrac{\sin(2\beta+\gamma)}{\sin(3\alpha)}$。由 $\triangle GXZ$ 得 $\overline{GZ}=\overline{ZX}\cdot\dfrac{\sin(2\gamma+\alpha)}{\sin(3\beta)}$ 且 $\overline{GX}=\overline{ZX}\cdot\dfrac{\sin(\gamma+2\alpha)}{\sin(3\beta)}$。再由 $\triangle HYX$ 得 $\overline{HX}=\overline{XY}\cdot\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(3\gamma)}$ 且 $\overline{HY}=\overline{XY}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin(3\gamma)}$。又因 $\overline{YZ}=\overline{ZX}=\overline{XY}$, 可得 $\dfrac{\overline{FZ}}{\overline{GZ}}=\dfrac{\sin(3\beta)\cdot\sin(\beta+2\gamma)}{\sin(3\alpha)\cdot\sin(2\gamma+\alpha)}$ 且 $\dfrac{\overline{FY}}{\overline{HY}}=\dfrac{\sin(3\gamma)\cdot\sin(2\beta+\gamma)}{\sin(3\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\beta)}$ 與 $\dfrac{\overline{GX}}{\overline{HX}}=\dfrac{\sin(3\gamma)\cdot\sin(\gamma+2\alpha)}{\sin(3\beta)\cdot\sin(2\alpha+\beta)}$。

(iv) 對 $\triangle FGH$, 有 $\overline{FG}=\overline{FZ}+\overline{ZG}=\overline{FZ}\cdot\left(1+\dfrac{\overline{ZG}}{\overline{FZ}}\right)$, 得 $\overline{FZ}=\overline{FG}\cdot\left(\dfrac{\overline{FZ}}{\overline{FZ}+\overline{ZG}}\right)$, 因此有

$$\overline{FZ}=\overline{FG}\cdot\left(\frac{\sin(3\beta)\cdot\sin(\beta+2\gamma)}{\sin(3\beta)\cdot\sin(\beta+2\gamma)+\sin(3\alpha)\cdot\sin(2\gamma+\alpha)}\right), \tag{19}$$

只需要應用到 α、β、γ 三個角度值即可尋找到點 Z 坐落在線段 $\overline{FG}$ 上的位置。同理,

$$\overline{GX}=\overline{GH}\cdot\left(\frac{\sin(3\gamma)\cdot\sin(\gamma+2\alpha)}{\sin(3\gamma)\cdot\sin(\gamma+2\alpha)+\sin(3\beta)\cdot\sin(2\alpha+\beta)}\right), \tag{20}$$

只需應用到 α、β、γ 三個角度值即可尋找到點 X 坐落在線段 $\overline{GH}$ 上的位置。又有

$$\overline{HY}=\overline{HF}\cdot\left(\frac{\sin(3\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\beta)}{\sin(3\alpha)\cdot\sin(\alpha+2\beta)+\sin(3\gamma)\cdot\sin(2\beta+\gamma)}\right), \tag{21}$$

僅需應用到 α、β、γ 三個角度值即可尋找到點 Y 坐落在線段 $\overline{HF}$ 上的位置。

(v) 這樣由 (19) 式、(20) 式、(21) 式三式即可在 $\triangle FGH$ 的周邊上確實作出一個內接的等邊三角形 $\triangle XYZ$, 而 $\triangle FGH$ 的 3 個頂角分別爲 $\angle YFZ=3\alpha$, $\angle ZGX=3\beta$, $\angle XHY=3\gamma$。又有 $\angle FYZ=\beta+2\gamma$, $\angle FZY=2\beta+\gamma$, $\angle GZX=2\alpha+\gamma$, $\angle GXZ=2\gamma+\alpha$, $\angle HXY=2\beta+\alpha$, $\angle HYX=2\alpha+\beta$。證明完成。

(二) 三角形各頂角的二等分線製作出任意三角形的3個內接等邊三角形

推論8: 任意三角形各頂角的二等分線製作出三角形的 3 個內接等邊三角形

給定任意三角形 $\triangle ABC$ 各頂角分別爲 $A=2\alpha$, $B=2\beta$, $C=2\gamma$, 圖 12。

圖12

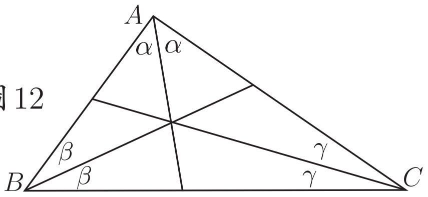
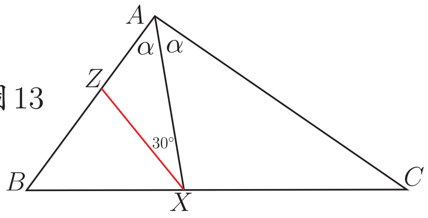


圖13



證明1: (i) 作頂角 A 的二等分線相交於線段 $\overline{BC}$ 上的 X 點, 通過 X 點作出一直線段 $\overline{XZ}$ 使得 $\angle AXZ=30^\circ$ 而交於線段 $\overline{AB}$ 上的 Z 點, 圖 13。

圖14

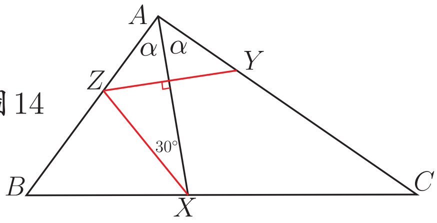
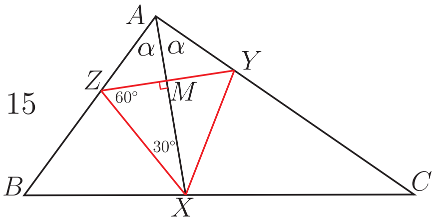


圖15



過 Z 點對直線段 $\overline{AX}$ 作一垂直線交於線段 $\overline{AC}$ 上的 Y 點, 使得 $\angle YZX=60^\circ$, 圖 14。直線段 $\overline{YZ}$ 與 $\overline{AX}$ 相交於 M 點, 再連接 Y 與 X 兩點形成線段 $\overline{XY}$ 以完成一個等邊三角形 $\triangle XYZ$, 圖 15。

(ii) 圖 15, 由直角 $\triangle AZM$ 與 $\triangle AYM$ 的 ASA 全等性質可得直線段 $\overline{ZM}=\overline{MY}$, $\overline{AZ}=\overline{AY}$, 再由直角 $\triangle ZXM$ 與 $\triangle YXM$ 的 SAS 全等性質可得直線段 $\overline{ZX}=\overline{YX}$, $\angle ZYX=60^\circ$, 從而證明了 $\triangle XYZ$ 爲一個內接的等邊三角形。

(iii) 因 $\overline{AZ}=\overline{AY}$, 得 $\angle AZY=\angle AYZ=\dfrac{B+C}{2}$, 又可計算得 $\angle BZX=\dfrac{2A}{3}+\dfrac{B+C}{6}$, $\angle BXZ=\dfrac{A}{3}-\dfrac{B}{6}+\dfrac{5C}{6}$ 且 $\angle CYX=\dfrac{2A}{3}+\dfrac{B+C}{6}$, $\angle CXY=\dfrac{A}{3}+\dfrac{5B}{6}-\dfrac{C}{6}$。由 $\triangle AZY$ 的正弦定理有 $\dfrac{\overline{AZ}}{\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}=\dfrac{\overline{AY}}{\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}=\dfrac{\overline{YZ}}{\sin A}$, 得 $\overline{AZ}=\overline{AY}=\overline{YZ}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\sin A}$。由 $\triangle BZX$得 $\overline{BZ}=\overline{ZX}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{A}{3}-\dfrac{B}{6}+\dfrac{5C}{6}\right)}{\sin B}$ 且 $\overline{BX}=\overline{ZX}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{2A}{3}+\dfrac{B+C}{6}\right)}{\sin B}$。由 $\triangle XCY$得 $\overline{CX}=\overline{XY}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{2A}{3}+\dfrac{B+C}{6}\right)}{\sin C}$ 且 $\overline{CY}=\overline{XY}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{A}{3}+\dfrac{5B}{6}-\dfrac{C}{6}\right)}{\sin C}$。又因 $\overline{YZ}=\overline{ZX}=\overline{XY}$,

可得 $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=\dfrac{\sin B\cdot\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin\left(\dfrac{A}{3}-\dfrac{B}{6}+\dfrac{5C}{6}\right)}$ 且 $\dfrac{\overline{BX}}{\overline{CX}}=\dfrac{\sin C}{\sin B}$ 與 $\dfrac{\overline{AY}}{\overline{CY}}=\dfrac{\sin C\cdot\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin\left(\dfrac{A}{3}+\dfrac{5B}{6}-\dfrac{C}{6}\right)}$。

(iv) 圖 15, $\triangle ABC$ 有 $\overline{AB}=\overline{AZ}+\overline{ZB}=\overline{AZ}\cdot\left(1+\dfrac{\overline{ZB}}{\overline{AZ}}\right)$, 得 $\overline{AZ}=\overline{AB}\cdot\left(\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AZ}+\overline{ZB}}\right)$,

$$\text{因此有}\quad \overline{AZ}=\overline{AB}\cdot\left(\frac{\sin B\cdot\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\sin A\cdot\sin\left(\dfrac{A}{3}-\dfrac{B}{6}+\dfrac{5C}{6}\right)+\sin B\cdot\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}\right),\qquad(22)$$

只需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 Z 坐落在線段 $\overline{AB}$ 上的位置。同理,

$$\overline{BX}=\overline{BC}\cdot\left(\frac{\sin C}{\sin B+\sin C}\right),\qquad(23)$$

只需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 X 坐落在線段 $\overline{BC}$ 上的位置。又有

$$\overline{CY}=\overline{AC}\cdot\left(\frac{\sin A\cdot\sin\left(\dfrac{A}{3}+\dfrac{5B}{6}-\dfrac{C}{6}\right)}{\sin C\cdot\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)+\sin A\cdot\sin\left(\dfrac{A}{3}+\dfrac{5B}{6}-\dfrac{C}{6}\right)}\right),\qquad(24)$$

僅需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 Y 坐落在線段 $\overline{CA}$ 上的位置。

(v) 這樣由 (22) 式、(23) 式、(24) 式三式即可在 $\triangle ABC$ 的周邊上確認預先以作頂角 A 的二等分線再作出一個內接的等邊三角形 $\triangle XYZ$, 而 $\angle AZY=\angle AYZ=\dfrac{B+C}{2}$, 又分別有角度 $\angle BZX=\dfrac{2A}{3}+\dfrac{B+C}{6}$, $\angle BXZ=\dfrac{A}{3}-\dfrac{B}{6}+\dfrac{5C}{6}$ 且 $\angle CYX=\dfrac{2A}{3}+\dfrac{B+C}{6}$, $\angle CXY=\dfrac{A}{3}+\dfrac{5B}{6}-\dfrac{C}{6}$。四邊形 $\diamondsuit\ AZXY$ 爲鳶形。證明完成。

證明 2: 仿效 [證明 1]方法, 作頂角 B 的二等分線相交於線段 $\overline{CA}$ 上的 Y 點,

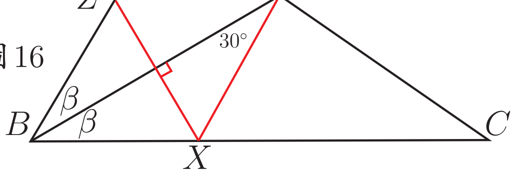


圖 16

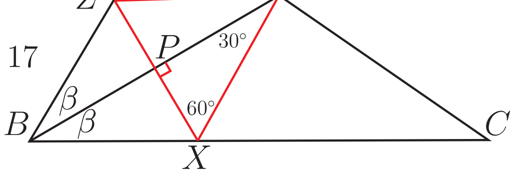


圖 17

(i) 圖16, 通過 Y 點作出一直線段 $\overline{YX}$ 使得 $\angle BYX = 30^\circ$ 而交於線段 $\overline{BC}$ 上的 X 點。再通過 X 點對二分角線段 $\overline{BY}$ 作出一垂直線交於線段 $\overline{AB}$ 上的 Z 點, 使得 $\angle YXZ = 60^\circ$。直線段 $\overline{XZ}$ 與 $\overline{BY}$ 相交於 P 點, 再連接 Y 與 Z 兩點形成直線段 $\overline{YZ}$ 以完成一個等邊三角形 $\triangle XYZ$ 內接於 $\triangle ABC$ 的周邊, 圖17。

(ii) $\triangle BXZ$ 中, 有 $\angle BZX = \angle BXZ = \dfrac{C+A}{2}$, 又可計算得 $\angle AZY = \dfrac{2B}{3} + \dfrac{C+A}{6}$, $\angle AYZ = \dfrac{B}{3} + \dfrac{5C}{6} - \dfrac{A}{6}$ 且 $\angle CYX = \dfrac{5A}{6} + \dfrac{B}{3} - \dfrac{C}{6}$, $\angle CXY = \dfrac{2B}{3} + \dfrac{C+A}{6}$。應用三角形正弦定理及 $\overline{YZ} = \overline{ZX} = \overline{XY}$ 關係, 可得 $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \dfrac{\sin B \cdot \sin\left(\frac{B}{3} + \frac{5C}{6} - \frac{A}{6}\right)}{\sin A \cdot \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)}$ 且 $\dfrac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \dfrac{\sin C \cdot \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)}{\sin B \cdot \sin\left(\frac{5A}{6} + \frac{B}{3} - \frac{C}{6}\right)}$ 與 $\dfrac{\overline{AY}}{\overline{CY}} = \dfrac{\sin C}{\sin A}$。

(iii) 圖17, $\triangle ABC$ 有 $\overline{AB} = \overline{AZ} + \overline{ZB} = \overline{AZ} \cdot \left(1 + \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{AZ}}\right)$, 得 $\overline{AZ} = \overline{AB} \cdot \left(\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AZ} + \overline{ZB}}\right)$, 因此有

$$\overline{AZ} = \overline{AB} \cdot \left(\frac{\sin B \cdot \sin\left(\frac{B}{3} + \frac{5C}{6} - \frac{A}{6}\right)}{\sin A \cdot \sin\left(\frac{C+A}{2}\right) + \sin B \cdot \sin\left(\frac{B}{3} + \frac{5C}{6} - \frac{A}{6}\right)}\right), \tag{25}$$

只需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 Z 坐落在線段 $\overline{AB}$ 上的位置。同理,

$$\overline{BX} = \overline{BC} \cdot \left(\frac{\sin C \cdot \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)}{\sin B \cdot \sin\left(\frac{5A}{6} + \frac{B}{3} - \frac{C}{6}\right) + \sin C \cdot \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)}\right), \tag{26}$$

只需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 X 坐落在線段 $\overline{BC}$ 上的位置。又有

$$\overline{CY} = \overline{AC} \cdot \left(\frac{\sin A}{\sin C + \sin A}\right), \tag{27}$$

僅需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 Y 坐落在線段 $\overline{CA}$ 上的位置。

(iv) 這由 (25) 式、(26) 式、(27) 式三式即可在 $\triangle ABC$ 的周邊上確認預先以作頂角 B 的二等分線再作出第 2 個內接的等邊三角形 $\triangle XYZ$, 而 $\angle BZX = \angle BXZ = \dfrac{C+A}{2}$, 又分別有 $\angle AZY = \dfrac{2B}{3} + \dfrac{C+A}{6}$, $\angle AYZ = \dfrac{B}{3} + \dfrac{5C}{6} - \dfrac{A}{6}$ 且 $\angle CYX = \dfrac{5A}{6} + \dfrac{B}{3} - \dfrac{C}{6}$, $\angle CXY = \dfrac{2B}{3} + \dfrac{C+A}{6}$。四邊形 $\diamondsuit\ BXYZ$ 為鳶形。證明完成。

證明3: 仿效 [證明1]方法, 作頂角 C 的二等分線相交於線段 $\overline{AB}$ 上的 Z 點,

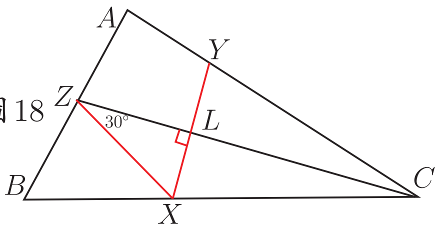
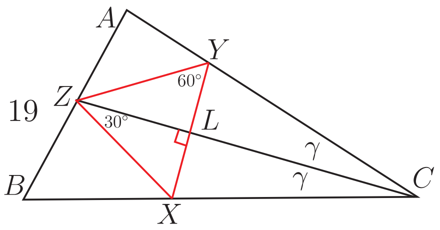
圖18


圖19


(i) 圖18, 通過 Z 點作出一直線段 $\overline{ZX}$ 使得 $\angle CZX=30^\circ$ 而交於線段 $\overline{BC}$ 上的 X 點。再通過 X 點對二分角線段 $\overline{CZ}$ 作出一垂直線交於線段 $\overline{AC}$ 上的 Y 點, 使得 $\angle ZXY=60^\circ$。直線段 $\overline{XY}$ 與 $\overline{CZ}$ 相交於 L 點, 再連接 Y 與 Z 兩點形成直線段 $\overline{YZ}$ 以完成第 3 個等邊三角形 $\triangle XYZ$ 內接於 $\triangle$ ABC 的周邊, 圖19。

(ii) $\triangle CYX$ 中, 有 $\angle CYX=\angle CXY=\dfrac{A+B}{2}$, 又可計算得 $\angle AYZ=\dfrac{2C}{3}+\dfrac{A+B}{6}$, $\angle AZY=\dfrac{5B}{6}+\dfrac{C}{3}-\dfrac{A}{6}$ 且 $\angle BZX=\dfrac{C}{3}+\dfrac{5A}{6}-\dfrac{B}{6}$, $\angle BXZ=\dfrac{2C}{3}+\dfrac{A+B}{6}$。應用三角形正弦定理及 $\overline{YZ}=\overline{ZX}=\overline{XY}$ 關係, 可得

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=\frac{\sin B}{\sin A} \text{ 且 } \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}=\frac{\sin C\cdot\sin\left(\frac{C}{3}+\frac{5A}{6}-\frac{B}{6}\right)}{\sin B\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} \text{ 與 } \frac{\overline{AY}}{\overline{CY}}=\frac{\sin C\cdot\sin\left(\frac{5B}{6}+\frac{C}{3}-\frac{A}{6}\right)}{\sin A\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}。$$

(iii) 圖19, $\triangle ABC$ 有 $\overline{AB}=\overline{AZ}+\overline{ZB}=\overline{AZ}\cdot\left(1+\dfrac{\overline{ZB}}{\overline{AZ}}\right)$, 得 $\overline{AZ}=\overline{AB}\cdot\left(\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AZ}+\overline{ZB}}\right)$, 因此有

$$\overline{AZ}=\overline{AB}\cdot\left(\frac{\sin B}{\sin A+\sin B}\right), \tag{28}$$

只需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 Z 坐落在線段 $\overline{AB}$ 上的位置。同理,

$$\overline{BX}=\overline{BC}\cdot\left(\frac{\sin C\cdot\sin\left(\frac{C}{3}+\frac{5A}{6}-\frac{B}{6}\right)}{\sin B\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)+\sin C\cdot\sin\left(\frac{C}{3}+\frac{5A}{6}-\frac{B}{6}\right)}\right), \tag{29}$$

只需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 X 坐落在線段 $\overline{BC}$ 上的位置。又有

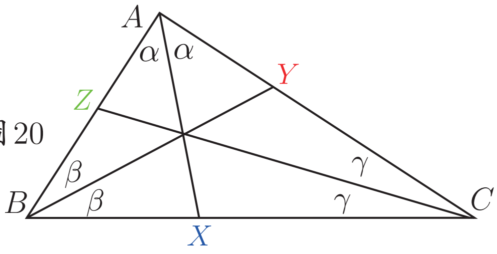
$$\overline{CY}=\overline{AC}\cdot\left(\frac{\sin A\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin C\cdot\sin\left(\frac{5B}{6}+\frac{C}{3}-\frac{A}{6}\right)+\sin A\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}\right), \tag{30}$$

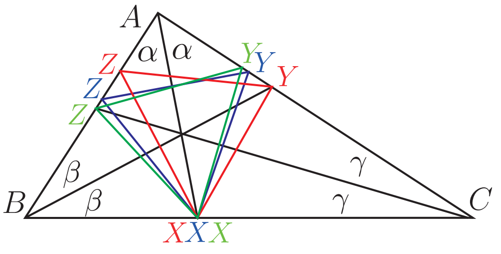
僅需應用到 A、B、C 三個角度值即可尋找到點 Y 坐落在線段 $\overline{CA}$ 上的位置。

(iv) 這由 (28) 式、(29) 式、(30) 式三式即可在 $\triangle ABC$ 的周邊上確認預先以作頂角 C 的二等分線再作出第 3 個內接的等邊三角形 $\triangle XYZ$, 而 $\angle CYX=\angle CXY=\dfrac{A+B}{2}$, 又分別有 $\angle AYZ=\dfrac{2C}{3}+\dfrac{A+B}{6}$, $\angle AZY=\dfrac{5B}{6}+\dfrac{C}{3}-\dfrac{A}{6}$ 且 $\angle BZX=\dfrac{C}{3}+\dfrac{5A}{6}-\dfrac{B}{6}$, $\angle BXZ=\dfrac{2C}{3}+\dfrac{A+B}{6}$。四邊形 $\diamondsuit\ ZXCY$ 爲鳶形。證明完成。

將此 3 個內接的等邊三角形 $\triangle XYZ$ 畫在同一個三角形中, 得到圖 20 結果。

圖 20





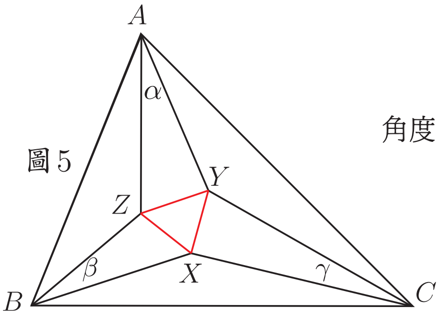
藍色等邊三角形 $\triangle XYZ$ 是以 $\overline{AX}$ 等分線作圖的結果; 紅色等邊三角形 $\triangle XYZ$ 是以 $\overline{BY}$ 等分線作圖的結果; 綠色正三角形 $\triangle XYZ$ 是以 $\overline{CZ}$ 等分線作圖的結果。

參、結論

本文推演出主要命題: 三角形各內角的 n 等分線交點性質; 三角形各內角的 3 等分線 Morley's theorem 性質; 任意三角形的 4 個內接等邊三角形作圖法。主題特點: 三角形各內角的 n 等分線交點性質全面統一了 Morley's theorem。

在 [主題二]: 三角形各內角的 3 等分線性質整體推演敘述中見到 6 個角度形式, 如圖 5 的 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}+\gamma=\angle AYZ$ 與 $\angle AZY=\pi-\alpha-\theta_1=\dfrac{\pi}{3}+\beta=\theta_2$。

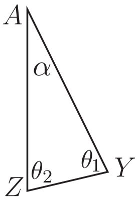
圖 5



角度 $A=3\alpha$

$B=3\beta$

$C=3\gamma$



$\angle AYZ=\theta_1$

$\angle AZY=\theta_2$

$\angle BZX=\theta_3=\dfrac{\pi}{3}+\alpha$, $\angle BXZ=\theta_4=\dfrac{\pi}{3}+\gamma$。還有 $\angle CXY=\theta_5=\dfrac{\pi}{3}+\beta$, $\angle CYX=\theta_6=\dfrac{\pi}{3}+\alpha$。可以對圖 5 進行額外的作輔助線圖以深刻理解每一 θ_i 的圖解內涵; 於是實際再新作輔助線圖, 採取詳細大圖格局情形於下述圖 21;

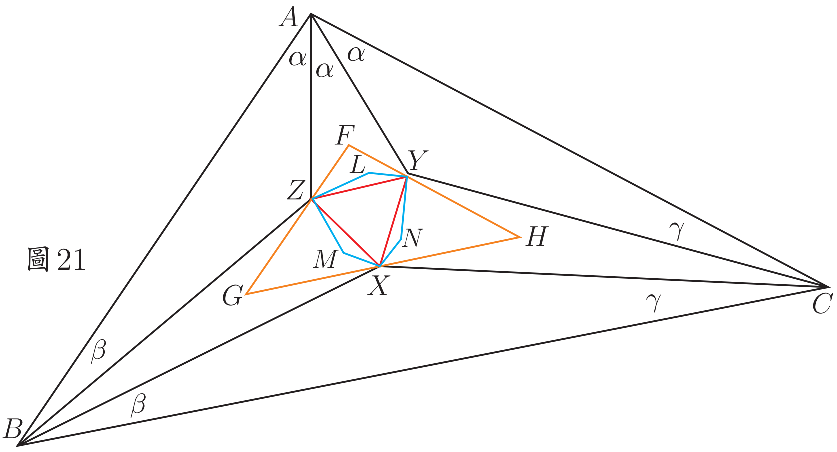


圖 21

(i) 通過 X、Y、Z 各點作出一直線分別依序平行於 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 線段, 兩兩交會得 3 個交點以形成圖 21 內的 $\triangle FGH$。繼續在 $\triangle AZY$ 上再通過 Z 點作一直線段 $\overline{ZL}$ 平行於 $\overline{BX}$ 與通過 Y 點作一直線段 $\overline{YL}$ 平行於 $\overline{CX}$ 而相交於 L 點。由兩平行線的內側角及同位角性質可得 $\angle AZF = \alpha = \angle AYF, \angle FZL = 2\beta, \angle FYL = 2\gamma$, 由 $\angle AZY = \angle AZF + \angle FZL + \angle LZY = \alpha + 2\beta + \angle LZY$, 因知 $\angle AZY = \dfrac{\pi}{3} + \beta = \theta_2$, 可計算得 $\angle LZY = \gamma$, 另由 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3} + \gamma = \angle AYZ = \angle AYF + \angle FYL + \angle LYZ$ 也能計算出 $\angle LYZ = \beta$, 如此 $\triangle LYZ$ 的角度值可推論得 $\triangle LYZ \sim \triangle XBC$ (相似形)。

(ii) 同理, 圖21, 在 $\triangle BXZ$ 內再推論出 $\triangle MXZ \sim \triangle YAC$; 又在 $\triangle CYX$ 內再推論出 $\triangle NXY \sim \triangle ZAB$。

由圖可見到: 在等邊三角形 $\triangle XYZ$ 的四周外圍恰巧連續分佈著 3 組對應的相似形三角形且其頂點都交集在 X、Y、Z 的 3 頂點上, 這是 3 等分線的一大特徵。

三角形各內角的 n 等分線交點性質在 $n \geq 4$ 時, 其 $\prod_{j=1}^{n-2} \sin\left(\dfrac{j\pi}{n} + \gamma\right)$ 及 $\prod_{j=1}^{n-2} \sin\left(\dfrac{j\pi}{n} + \alpha\right)$ 與 $\prod_{j=1}^{n-2} \sin\left(\dfrac{j\pi}{n} + \beta\right)$ 形式都無法透過適當的演算而縮減變通成單一型的 $\sin(\alpha + m\beta + k\gamma)$ 及 $\sin(\beta + p\gamma + q\alpha)$ 與 $\sin(\gamma + s\alpha + t\beta)$ 正弦角度形式, m、k、p、q、s、t 皆爲小於 n 的實數。這樣就使得 $\triangle XYZ$ 的各內角不能以純正的 α、β、γ 的線性組合式表達出來, 也就無法將 $\triangle XYZ$ 的外形結構分類出來, 更不能像圖 21 的 3 等分線情形對各 θ_i 角度新作輔助線圖, 以求得每一 θ_i 角度的 (α、β、γ 的線性組合式) 值。

三角形各內角的4等分線交點性質推演出的 (10) 式、(12) 式、(14) 式三式也可以利用作外接圓直徑爲 1 的三角形輔助圖而得到下述簡要的形式;

$$\text{(10) 式形式可轉化爲 } \sin\theta_1 = \cos\gamma \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right), \tag{10-1}$$

$$(12)\ \text{式形式可轉化爲}\ \sin\theta_3 = \cos\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right), \tag{10-2}$$

$$(14)\ \text{式形式可轉化爲}\ \sin\theta_5 = \cos\beta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right), \tag{10-3}$$

即使這樣, 仍然不容易將 θ_1、θ_3、θ_5 的角度簡易的表達出來。

參考文獻

1. 三角恆等式多倍角公式。Mathematica、Wolfram Mathworld 或 Wikipedia。
2. 黃家禮。《幾何明珠》(第三版)。九章出版社, 2014 年。
3. 笹部貞市郎。幾何學辭典。九章出版社, 1988 年。
4. 羅東高中: 康柏賢, 指導老師: 鍾明宏。Morley 三角形的奇蹟。中華民國第 59 屆中小學科學展覽會作品。
5. 新竹高中: 劉瑋, 指導老師: 儲啟政。任意三角形內接正三角形。國立台灣科學教育館。
6. Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*. Dover, 2007.

—本文作者爲嘉義市私立輔仁中學退休教師—